

基于响应灵敏度法的时滞系统参数识别*

吴蓉, 刘济科, 吕中荣, 汪利
(中山大学航空航天学院, 广东 广州 510006)

摘要: 基于灵敏度分析, 结合 Tikhonov 正则化和置信域约束, 将时滞系统的参数识别反问题转化为一个标准的非线性最小二乘优化问题, 提出一种基于响应灵敏度法的时滞系统的参数识别方法。以一个单自由度的线性时滞系统模型为例, 对加速度进行灵敏度分析, 然后进行参数识别。参数识别的数值模拟表明: 该方法能有效识别简单时滞系统的参数, 且具有识别精度高、收敛速度快、对噪声不大敏感的优点。

关键词: 时滞微分方程; 参数识别; 灵敏度法; 置信域约束

中图分类号: TB123 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2020)04-0074-05

Parameter identification of delayed system based on response sensitivity approach

WU Rong, LIU Jike, LU Zhongrong, WANG Li

(School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Based on sensitivity analysis, by introducing Tikhonov regularization and trust-region restriction, the inverse problem of delayed system - parameter identification is transformed into a normal nonlinear least squares optimization problem with trust region, and a parameter identification method for delayed system based on response sensitivity approach is proposed. A single-degree-of-freedom linear delayed system model is studied and the sensitivity analysis of acceleration is carried out. The numerical simulation of parameter identification shows that the proposed method can effectively identify the parameters of simple delayed system, and has the advantages of high identification accuracy, fast convergence speed and less sensitivity to noise. This numerical example verifies the feasibility and efficiency of the response sensitivity approach in the practical parameter identification of delayed systems.

Key words: delay differential equations (DDE); parameter identification; response sensitivity approach; trust-region restriction

时滞系统是一类存在时滞现象的特殊系统, 体现在系统过去某一段时间的状态对系统当前状态的影响存在一个时间上的滞后。时滞系统普遍存在于各类自然、社会和工程实际之中, 比如: 力学、机械学、生态学、医学和经济学等, 对时滞系统动力学的研究有利于促进这些应用领域的

发展^[1]。时滞系统的数学模型是时滞微分方程, 不同于由偏微分方程描述的动力学系统, 它是一类泛函微分方程^[2]。确定一个时滞系统, 即要确定时滞微分方程的参数。因此, 参数未标识或标识不完全的情况下, 时滞系统的参数识别是应用和分析时滞系统的重要准备工作。

* 收稿日期: 2019-03-05

基金项目: 国家自然科学基金 (11972380); 广东省科技计划项目 (2016A020223006); 广东省自然科学基金 (2018B030311001); 高校基本科研业务费 (17lgjc42)

作者简介: 吴蓉 (1990年生), 女; 研究方向: 振动系统参数识别与结构损伤识别; E-mail: 1547742272@qq.com

通信作者: 吕中荣 (1975年生), 男; 研究方向: 结构损伤识别与健康监测; E-mail: lvzhr@mail.sysu.edu.cn

时滞系统的参数识别问题是一类复杂的反问题,与一般微分系统的参数识别方法思想类似,该问题可转化为一个非线性最小二乘优化问题。基于灵敏度分析的模型修正法是一种常用的参数识别方法,可较好地与Tikhonov正则化结合,且便于引进修正参数的置信域区间,以求解参数识别方程的非线性最小二乘优化问题^[3]。本文利用测量动力响应数据作为测量数据,同时考虑时滞系统的特性,采用响应灵敏度法进行了一个简单时滞系统的参数识别。算例表明,响应灵敏度法能较好地识别时滞系统的参数且具有一定的抗噪能力。

1 问题描述

1.1 时滞系统

一般地,时滞系统由如下的时滞微分方程给出

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t-\tau), a_1, a_2, \dots, a_m) \\ x(t) = x_0(t), \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t), \quad t \leq t_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 表示 n 维系统响应, τ 表示时滞参数, a_i ($i=1, 2, \dots, m$) 是一般系统参数, t_0 代表初始时刻, $x_0(t)$ 则是给定初始值时刻之前的解,为已知函数。当 $F(\cdot)$ 关于 $x(t)$, $x(t-\tau)$ 是线性时,该系统为线性时滞系统。

时滞微分方程相比于一般微分方程具有更复杂的性质。一方面,系统在平衡点附近的线性近似系统的特征方程由一般的有限次多项式代数方程变为超越方程^[4],有无穷多个特征根,解空间也成为无限维,需要数值方法进行求解;另一方面,要保证线性时滞微分方程的稳定性,方程的所有(无数个)特征根全部都要具有负实部,这就意味着线性时滞系统的稳定性更为复杂^[5]。本文将使用MATLAB软件中的dde23函数对目标时滞微分方程(1)进行数值求解。

1.2 反问题的定义

时滞系统的参数识别作为一类典型的反问题,它是通过测量的响应数据来反推系统的某些参数。假设测量变量 d 与系统状态变量 x 有如下关系 $d = Lx$, 其中 L 是线性算子。当测量变量为速度时, $L = d/dt$ 。实际中,测量数据由测量变量 d 在一系列时间点 $t_1 < t_2, \dots, < t_{NT}$ 上的响应数据组成,因此实际测量得到的响应数据记为 $\hat{R} = (\hat{d}(t_1), \hat{d}(t_2), \hat{d}(t_3), \dots, \hat{d}(t_{NT}))^T$ 。为方便后续分析,

将方程(1)中所有的 $m+1$ 个参数组成一个参数列向量 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_m, \tau]^T$, 该参数向量控制着系统的响应,或者说 $x(t)$ 和 $d(t)$ 是 \mathbf{a} 的隐函数。与测量响应数据相对应的计算响应数据可记为 $\mathbf{R}(\mathbf{a}) = (d(t_1), d(t_2), d(t_3), \dots, d(t_{NT}))^T$ 。有了测量响应 \hat{R} 和计算响应 $\mathbf{R}(\mathbf{a})$, 根据一般反问题的求解思路,时滞系统参数识别问题可转化为如下非线性最小二乘优化问题。

$$\mathbf{a}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{a} \in A} \{g(\mathbf{a}) := \|\hat{R} - \mathbf{R}(\mathbf{a})\|^2\} \quad (2)$$

其中, \mathbf{a}^* 为最终识别得到的参数, $g(\mathbf{a})$ 为非线性最小二乘目标函数, A 为有效的参数空间, $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ 为向量 $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ 的二范数。

2 响应灵敏度法识别时滞系统参数

2.1 时滞系统灵敏度分析

对于式(2)的极小值问题,一般采用迭代优化的方法进行求解。而迭代法的关键在于如何在已有参数结果 $\bar{\mathbf{a}}$ 的基础上快速找到合理的更新值 $\delta\mathbf{a}$ 使得 $g(\bar{\mathbf{a}} + \delta\mathbf{a})$ 尽可能地小。将 \hat{R} 在 $\bar{\mathbf{a}}$ 处进行一阶泰勒展开并取其线性部分进行近似,则非线性目标函数(2)近似转化为如下线性最小二乘函数。

$$\hat{g}(\delta\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) = \|\delta\mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}) - S(\bar{\mathbf{a}})\delta\mathbf{a}\|^2 \quad (3)$$

其中, $\delta\mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}) = \hat{R} - \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}})$ 称为响应残差, $S(\bar{\mathbf{a}})$ 称为灵敏度矩阵,其具体表达为

$$S(\bar{\mathbf{a}}) = \begin{pmatrix} S_1(\bar{\mathbf{a}}) \\ S_2(\bar{\mathbf{a}}) \\ \vdots \\ S_{NT}(\bar{\mathbf{a}}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$S_j(\bar{\mathbf{a}}) = L \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1}(t_j) & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial a_{m+1}}(t_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial a_1}(t_j) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial a_{m+1}}(t_j) \end{pmatrix} \quad (5)$$

显然,近似目标函数 $\hat{g}(\delta\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ 的核心在于矩阵 $S(\bar{\mathbf{a}})$, 而矩阵 $S(\bar{\mathbf{a}})$ 的获取则完全依赖响应灵敏度 $\frac{\partial x}{\partial a_i}(t), i=1, 2, \dots, m+1$ 计算。根据微分链式法则,系统响应 $x(t)$ 关于一般参数 a_i ($i=1, 2, \dots, m$) 的灵敏度应遵循如下微分方程。

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial x_\tau} \frac{\partial x_\tau}{\partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial a_i}, i = (1, 2, \dots, m) \\ \frac{\partial x}{\partial a_i}(t) = 0, t \leq t_0 \end{cases} \quad (6)$$

而, 系统响应 $x(t)$ 关于时滞参数 τ 的灵敏度则应满足

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \tau} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x_\tau} \left(\frac{\partial x_\tau}{\partial \tau} - \dot{x}_\tau \right) \\ \frac{\partial x}{\partial \tau}(t) = 0, t \leq t_0 \end{cases} \quad (7)$$

其中, $x_\tau = x(t - \tau)$ 。不难看出, 时滞系统的灵敏度方程 (6)、(7) 仍为时滞微分方程, 联合方程 (1)、(6)、(7), 使用 MATLAB 的 dde23 函数可进行求解^[6]。

2.2 响应灵敏度法

式 (3) 中所得的线性最小二乘目标函数可直接求得最小值, 为改善反问题求解的适定性, 可采用正则化方法, Tikhonov 正则化^[7] 是一种常见的正则化方法。

$$\delta \mathbf{a}_\lambda = \arg \min_{\delta \mathbf{a} \in \{A - \bar{a}\}} \|\delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}) - S(\bar{\mathbf{a}}) \delta \mathbf{a}\|^2 + \lambda \|\delta \mathbf{a}\|^2 \quad (8)$$

$$\delta \mathbf{a}_\lambda = \left[S(\bar{\mathbf{a}})^T S(\bar{\mathbf{a}}) + \lambda \mathbf{I} \right]^{-1} S(\bar{\mathbf{a}})^T \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}) \quad (9)$$

其中, $\lambda \geq 0$ 称为正则化参数, 通常是一个小量, 它控制着更新量的步长, \mathbf{I} 是单位矩阵。

不同的正则化参数 λ 会导致不同的更新量 $\delta \mathbf{a}_\lambda$, 因此需要合理选择正则化参数, 本文采用 L-curve 方法^[8-9] 进行确定。针对不同的 λ , 作残差范数 $\|\delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}) - S(\bar{\mathbf{a}}) \delta \mathbf{a}_\lambda\|$ 和 $\|\delta \mathbf{a}_\lambda\|$ 的函数曲线, 曲线的角点处对应的 λ 即为最优的正则化参数。

为了使线性化后的目标函数 $\hat{g}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ 与原非线性的目标函数 $g(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a})$ 尽可能符合, 更新步长 $\|\delta \mathbf{a}\|$ 要足够小, 因此要进一步考虑修正参数约束条件, 引入约束 $\|\delta \mathbf{a}\| \leq \eta$, 其中 $\eta \geq 0$ 为待定的置信域半径。于是, 式 (3) 变为含不等式约束的优化问题, 如式 (10) 所示。

$$\begin{cases} \min_{\delta \mathbf{a} \in \{A - \bar{a}\}} \hat{g}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) = \|\delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}) - S(\bar{\mathbf{a}}) \delta \mathbf{a}\|^2 \\ \text{s.t. } \|\delta \mathbf{a}\| \leq \eta. \end{cases} \quad (10)$$

与正则化参数 λ 一样, 不同的置信域半径 η 也会导致不同的更新量 $\delta \mathbf{a}$, 为衡量线性化后的目标函数 $\hat{g}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ 与原非线性的目标函数 $g(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a})$ 的

符合程度, 引入一个一致性因子 $\rho(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ ^[3, 10] 作为吻合度指标。

$$\begin{aligned} \rho(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) &= \frac{g(\bar{\mathbf{a}}) - g(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a})}{\hat{g}(0, \bar{\mathbf{a}}) - \hat{g}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})} \\ &= \frac{\|\delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}})\|^2 - \|\delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a})\|^2}{\|\delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}})\|^2 - \|\delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}) - S(\bar{\mathbf{a}}) \delta \mathbf{a}\|^2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\rho(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) \geq \rho_{cr} \in [0.25, 0.75] \quad (12)$$

确定合理的置信域半径 η , 使得相应的更新量 $\delta \mathbf{a}$ 满足一致性条件 (12), 这即为置信域约束。至此, 响应灵敏度法可列出具体的算法, 实现步骤如表 1。

3 数值算例

考虑一个机械元件加工时常见的颤振方程^[4], 是一个单自由度系统的线性时滞微分方程:

$$\begin{cases} \frac{d(\delta x)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1 + \frac{K_c}{K_m}\right) \omega_n^2 & -2\zeta \omega_n \end{bmatrix} \delta x(t) \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu \frac{K_c}{K_m} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \delta x(t - T) \\ x(t) = 1, \dot{x}(t) = 0, t \leq 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\delta x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$ 。令参数向量为 $\mathbf{a} = \left[-\left(1 + \frac{K_c}{K_m}\right) \omega_n^2, -2\zeta \omega_n, \mu \frac{K_c}{K_m} \omega_n^2, T \right]^T$, 系统方程可以写成

$$\ddot{x} = a_1 x + a_2 \dot{x} + a_3 x(t - T) \quad (14)$$

选用加速度响应数据作为测量数据, 采集时间 0 到 5 s, 步长 0.01 s, 共 501 个数据, 加载不同程度的高斯噪声:

$$\hat{d}k = dk + e \text{Rand} \cdot \text{var}(dk), k = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

其中, $dk, \hat{d}k$ 分别是加噪前后的第 k 个响应数据, e 是噪声水平, Rand 是 $[-1, 1]$ 上的正态分布随机变量, $\text{var}(dk)$ 是测量响应 dk 的标准差。

误差分析选择相对误差:

$$\text{reitol} = \left| \frac{a - a_r}{a_r} \right| \times 100\% \quad (16)$$

其中, reitol 为相对误差, a 为识别结果, a_r 为真实参数值。

表1 响应灵敏度法的具体步骤
Table 1 Procedure of response sensitivity approach

序号	步骤
1	设定待识别的参数初值 \mathbf{a}_1 ;
2	定义收敛的误差容限 tol (10^{-6});
3	设定迭代最大步数 Imax (800) 及置信域约束参数 ρ (0.5) 和放大因子 γ (2), 设定每次迭代的置信域约束最大步数 Tmax (20);
4	载入测量数据 $\hat{\mathbf{R}}$;
5	for $k=1$: Imax %迭代求解程序
6	在当前参数 \mathbf{a}_k 下求解系统微分方程 (1), 得到计算数据 $\mathbf{R}(\mathbf{a}_k)$, 并计算残差 $\delta\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}(\mathbf{a}_k)$;
7	求解灵敏度方程 (6) - (7), 计算响应灵敏度矩阵 $\mathbf{S}(\mathbf{a}_k)$;
8	由 L-curve 方法, 得到初始正则化参数 $\lambda = \lambda_L(\mathbf{a}_k)$;
9	for $i=1$: Tmax %置信域约束
10	计算正则化参数 $\lambda = \gamma^{i-1} \lambda_L(\mathbf{a}_k)$;
11	由式 (9) 计算更新量 $\delta\mathbf{a}_k$;
12	if $\mathbf{a}_k + \delta\mathbf{a}_k \notin A$, continue;
13	计算 $\mathbf{R}(\mathbf{a}_k + \delta\mathbf{a}_k)$, 并计算新的响应残差 $\delta\mathbf{R}_{\text{new}} = \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}(\mathbf{a}_k + \delta\mathbf{a}_k)$;
14	由式 (11) 计算一致性因子 $\rho(\delta\mathbf{a}, \mathbf{a}_k)$;
15	if $\rho \geq \rho_{\text{cr}}$, break;
16	end for
17	更新参数 $\mathbf{a}_{k+1} = \delta\mathbf{a} + \mathbf{a}_k$;
18	if $\ \delta\mathbf{a}\ /\ \mathbf{a}_{k+1}\ \leq \text{tol}$, break;
19	end for

真实参数值 $\mathbf{a} = (-17.6\pi^2, -0.4\pi^2, 1.6\pi^2, 0.5)$ 的系统, 噪声水平分别为 0%、2%、5% 和 10% 时所测得的加速度响应如图 1 所示。

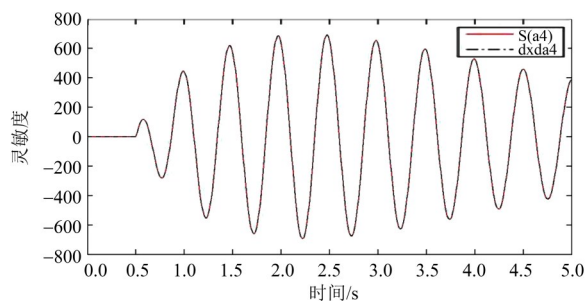


图1 不同级别测量误差下测得的加速度响应图
Fig. 1 Acceleration response of example 1 under different noise level

固定参数 $\mathbf{a}_1 = (-17.6\pi^2, -0.4\pi, 1.6\pi^2, 0.5)$ 的系统, 分别按式 (7) 灵敏度方程和差分法计算时滞参数 T 的灵敏度, 结果见图 2。两种方法的计算结果十分吻合, 证明了时滞参数灵敏度方程的正确性。图 2 中, 时滞参数 T 的灵敏度在 $[0, 0.5]$ 的区间上恒为零, 说明要能够识别时滞参数, 测量数据的采样时间长度必须大于时滞参数。

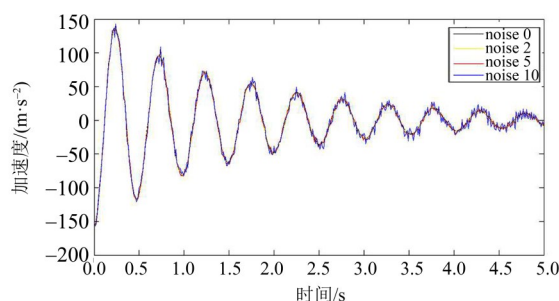


图2 加速度响应对时滞参数 T 的灵敏度 ($T=0.5$),
Fig. 2 Diagram of sensitivity to delay parameter T

固定测量数据误差水平为 2%, 考虑 4 种初值情况, 由响应灵敏度法计算的参数识别结果见表 2。不同的初始参数下, 参数识别结果基本一致, 最大相对误差为 1.23%, 最大迭代步为 102。也就是说, 对于该系统响应灵敏度法精度高且收敛快。

固定初始参数 $\mathbf{a}_1 = (-16\pi^2, -0.3\pi, \pi^2, 0.4)$, 考虑 4 种噪声水平 0%、1%、5% 和 10%, 由响应灵敏度法计算的参数识别结果见表 3。在 10% 的最大噪声水平下, 最大相对误差为 1.89%, 最大迭代步为 36。

表 2 不同初始值的参数识别结果(2% 噪声)

Table 2 Identification result of different initial values under noise level of 2%

初值	识别结果	最大相对误差/%	迭代步数
$(-16\pi^2, -0.3\pi, \pi^2, 0.4)$	$(-173.5083, -1.2509, 15.6358, 0.5003)$	0.98	35
$(-19\pi^2, -0.5\pi, \pi^2, 0.6)$	$(-173.5083, -1.2509, 15.6358, 0.5003)$	0.98	36
$(-16\pi^2, -0.8\pi, 0.6\pi^2, 0.4)$	$(-173.5083, -1.2509, 15.6358, 0.5003)$	0.98	37
$(-150, -0.1\pi, 0.8\pi^2, 0.2)$	$(-173.5589, -1.2529, 15.5976, 0.5002)$	1.23	102

表 3 不同噪声水平的参数识别结果

Table 3 Identification result under different noise level

噪声水平/%	识别结果	最大相对误差/%	迭代步数
0	$(-173.7050, -1.2566, 15.7914, 0.5000)$	0.00	36
1	$(-173.7400, -1.2528, 15.8260, 0.5003)$	0.30	35
5	$(-173.6074, -1.2793, 15.7790, 0.4986)$	1.80	36
10	$(-173.2688, -1.2358, 15.4930, 0.5014)$	1.89	19

4 结 论

基于灵敏度分析, 结合 Tikhonov 正则化和置域约束, 将时滞系统的参数识别反问题转化为一个标准的非线性最小二乘优化问题, 提出一种基于响应灵敏度法的时滞系统的参数识别方法, 并对一个单自由度的线性时滞系统模型进行参数识

别数值分析, 结果表明: 采样时长必须大于时滞参数才能成功识别时滞参数; 响应灵敏度法能在一定的初值范围内得到准确的参数识别结果; 即使在 10% 的噪声水平下, 响应灵敏度法仍能正确地识别时滞系统的参数, 具有较好的抗噪性; 针对该算例, 响应灵敏度法精度高、收敛快、有较好的鲁棒性。

参考文献:

- [1] 徐鉴, 裴利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望[J]. 力学进展, 2006, 36(1): 17-30.
XU J, PEI L J. Time delayed system dynamics: recent progress and future development[J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(1): 17-30.
- [2] KOLMANOVSKII V, MYSHKIS A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations[M]. New York: Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] LU Z R, WANG L. An enhanced response sensitivity approach for structural damage identification: convergence and performance[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2017(111): 1231-1251.
- [4] ASL F M. Analysis of a system of linear delay differential equations[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2003(125): 215-223.
- [5] ARINO O, PITUK M. More on linear differential systems with small delays[J]. Journal of Differential Equations, 2001, 170(2): 381-407.
- [6] SHAMPINE L F, THOMPSON S. Solving ddes in matlab[J]. Applied Numerical Mathematics, 2001, 37(4): 441-458.
- [7] TIKHONOV A N. Solution of ill-posed problems and the regularization method[J]. Soviet Math Dokl, 1963(4): 1035-1038.
- [8] HANSEN P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curves[J]. SIAM Review, 1992, 34(4): 561-580.
- [9] MORE J J. The Levenberg - Marquardt algorithm: implementation and theory, in numerical analysis[C]//Proceedings of the 1977 Dundee Conference on Numerical Analysis, Lecture Notes in Mathematics 630. Berlin: Springer Verlag, 1978: 105-116.
- [10] MADSEN K, NIELSEN H, TINGLEFF O. Method for non-linear least squares problems[M]. 2nd Edition. IMM, DTU, 2004.

(责任编辑 王海蓉)